1.2. Application

- 1.2 A. Cournot双头垄断模型
- 1.2 B. Bertrand双头垄断模型
- 1.2 C. 最后要价仲裁
- 1.2 D. 共有资源问题
- 我们将通过模型说明:
- (a) 把对一个问题的非正式描述转化为一个博弈的标准式表述;
- (b) 求解博弈的纳什均衡的计算过程;
- (c) 重复剔除严格劣势策略.

Cournot model of duopoly

- 一种产品仅由两家企业生产: firm 1 和 firm 2. 它们的产量分别用q_1和q_2表示. 每家企业选择产量时都不知道其他企业的选择.
- 市场价格是$P(Q)=a-Q$, 其中a 是常数并且 $Q=q_1+q_2$.
- firm i生产产量q_i的成本是$C_i(q_i)=cq_i$.

Cournot model of duopoly

标准式表述:

- 参与人集合: { **Firm 1, Firm 2**}
- 策略集: $\boldsymbol{S_1=[0, +\infty), S_2=[0, +\infty)}$
- 收益函数:

$$\boldsymbol{u_1(q_1, q_2)=q_1(a-(q_1+q_2)-c)}$$
$$\boldsymbol{u_2(q_1, q_2)=q_2(a-(q_1+q_2)-c)}$$

Using best response function to find Nash equilibrium

- 在2名参与人的博弈中,当且仅当（i）player 1的策略s_1是对player 2的策略s_2的最优反应，（ii）player 2的策略s_2 是对player 1的策略s_1的最优反应时，(s_1, s_2)是一个纳什均衡.

Cournot model of duopoly

- 如何找到纳什均衡
  - 找到产量组合 (q_1^*, q_2^*)， 其中q_1^* 是firm 1对Firm 2的产量 q_2^* 的最优反应， 而q_2^*是 firm 2对Firm 1的产量q_1^* 的最优反应
  - 即, q_1^* 是下面问题的解
    Max $u_1(q_1, q_2^*)=q_1(a-(q_1+q_2^*)-c)$
    subject to $0 \le q_1 \le +\infty$

    同时 q_2^*是下面问题的解
    Max $u_2(q_1^*, q_2)=q_2(a-(q_1^*+q_2)-c)$
    subject to $0 \le q_2 \le +\infty$

Cournot model of duopoly

- 如何找到纳什均衡
  - 解

    Max $u_1(q_1, q_2^*)=q_1(a-(q_1+q_2^*)-c)$

    subject to $0 \leq q_1 \leq +\infty$

    FOC: $a - 2q_1 - q_2^* - c = 0$

    $q_1 = (a - q_2^* - c)/2$

Cournot model of duopoly

- 如何找到纳什均衡
  - 解

    Max $u_2(q_1^*, q_2)=q_2(a-(q_1^*+q_2)-c)$

    subject to $0 \le q_2 \le +\infty$

    FOC: $a - 2q_2 - q_1^* - c = 0$

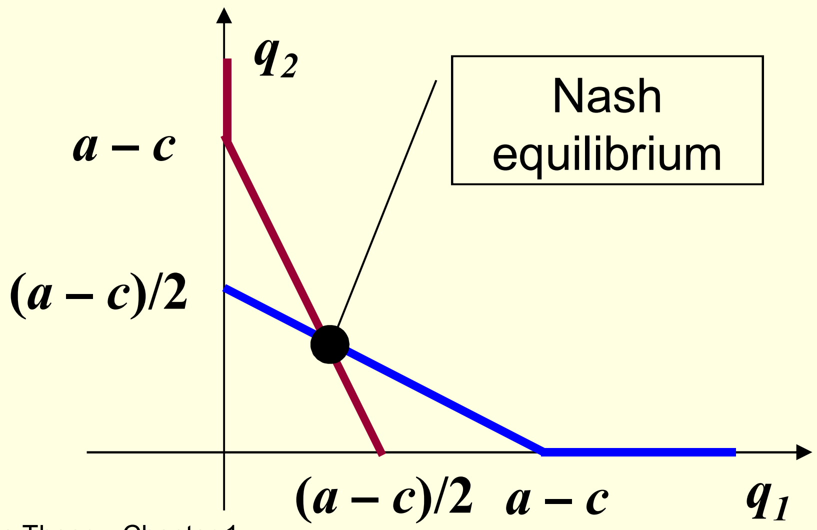
    $q_2 = (a - q_1^* - c)/2$

Cournot model of duopoly

- 如何找到纳什均衡
  - 如果$q_1^* = (a - q_2^* - c)/2$
    $q_2^* = (a - q_1^* - c)/2$
    那么产量组合 (q_1^*, q_2^*) 是一个纳什均衡
  - 解这两个方程得到
    $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$

Cournot model of duopoly

- 最优反应函数
  - Firm 1对firm 2的产量q_2的最优反应函数：
    $R_1(q_2) = (a - q_2 - c)/2$ if $q_2 < a - c$; 0, othwise
  - Firm 2对firm 1的产量q_1的最优反应函数:
    $R_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2$ if $q_1 < a - c$; 0, othwise



Cournot model of oligopoly

- 一种产品仅由*n* 家企业生产: firm 1到firm *n*. Firm *i*的产量用q_i表示.每家企业选择产量时都不知道其他企业的选择.
- 市场价格是$P(Q)=a-Q$, 其中a是常数并且$Q=q_1+q_2+\ldots+q_n$.
- firm i生产产量q_i的成本是$C_i(q_i)=cq_i$.

Cournot model of oligopoly

标准式表述:

- 参与人集合: { **Firm 1, ... Firm** $\boldsymbol{n}$}
- 策略集: $S_i=[0, +\infty)$, **for** $i=1, 2, ..., n$
- 收益函数:

  $u_i(q_1,..., q_n)=q_i(a-(q_1+q_2+...+q_n)-c)$

  for $i=1, 2, ..., n$

Cournot model of oligopoly

- 如何找到纳什均衡
  - 找到产量 $(q_1^*, \ldots q_n^*)$，其中q_i^*是firm i对其他企业产量的最优反应
  - 即, q_1^*是下面问题的解
    Max $u_1(q_1, q_2^*, \ldots, q_n^*)=q_1(a-(q_1+q_2^* +\ldots+q_n^*)-c)$
    subject to $0 \le q_1 \le +\infty$

    而q_2^*是下面问题的解
    Max $u_2(q_1^*, q_2, q_3^*, \ldots, q_n^*)=q_2(a-(q_1^*+q_2+q_3^*+ \ldots+ q_n^*)-c)$
    subject to $0 \le q_2 \le +\infty$

    ....

Cournot model of oligopoly

- 证明当n趋于无穷时, NE是完全竞争的结果, p=c.

  (提示: 借鉴对称性)

** 参见课本 PP13-17.

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 两家企业: firm 1和firm 2.
- 每家企业选择它的产品的价格时不知道其他企业的选择. 价格分别用$\boldsymbol{p_1}$和$\boldsymbol{p_2}$表示.
- 消费者对firm 1 产品的需求量: $\boldsymbol{q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2}$.
- 消费者对firm 2 产品的需求量: $\boldsymbol{q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1}$.
- firm $\boldsymbol{i}$生产数量为$\boldsymbol{q_i}$的成本是$\boldsymbol{C_i(q_i)=cq_i}$.

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

标准式表述:

- 参与人集合: { **Firm 1, Firm 2**}
- 策略集: $S_1=[0, +\infty), S_2=[0, +\infty)$
- 收益函数:

$$u_1(p_1, p_2)=(a-p_1+bp_2)(p_1-c)$$
$$u_2(p_1, p_2)=(a-p_2+bp_1)(p_2-c)$$

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 如何找到纳什均衡
  - 找到价格组合 (p_1*, p_2*)，其中 p_1* 是firm 1对Firm 2的价格p_2*的最优反应， p_2*是firm 2对Firm 1的价格p_1* 的最优反应
  - 即, p_1* 是以下问题的解
    Max $u_1(p_1, p_2^*) = (a - p_1 + bp_2^*)(p_1 - c)$
    subject to $0 \le p_1 \le +\infty$

    且 p_2*是以下问题的解
    Max $u_2(p_1^*, p_2) = (a - p_2 + bp_1^*)(p_2 - c)$
    subject to $0 \le p_2 \le +\infty$

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 如何找到纳什均衡
  - 解firm 1的最大化问题

    Max $u_1(p_1, p_2^*) = (a - p_1 + bp_2^*)(p_1 - c)$

    subject to $0 \le p_1 \le +\infty$

    FOC: $a + c - 2p_1 + bp_2^* = 0$

    $p_1 = (a + c + bp_2^*)/2$

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 如何找到纳什均衡
  - 解firm 2的最大化问题

    Max $u_2(p_1^*, p_2)=(a - p_2 + bp_1^*)(p_2 - c)$

    subject to $0 \le p_2 \le +\infty$

    FOC: $a + c - 2p_2 + bp_1^* = 0$

    $$p_2 = (a + c + bp_1^*)/2$$

Bertrand model of duopoly (differentiated products)

- 如何找到纳什均衡
  - 如果$p_1^* = (a + c + bp_2^*)/2$
    $p_2^* = (a + c + bp_1^*)/2$
    那么价格组合 (p_1^*, p_2^*) 是一个纳什均衡
  - 解这两个方程可以得到
    $p_1^* = p_2^* = (a + c)/(2 - b)$

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

- 两家企业: firm 1 和firm 2.
- 每家企业选择它的产品的价格时不知道其他企业的选择. 价格分别用p_1和p_2表示.
- 消费者对firm 1产品的需求量:
- $q_1(p_1, p_2) = a - p_1$ if $p_1 < p_2$;
- $= (a - p_1)/2$ if $p_1 = p_2$;
- $=0,$ if $p_1 > p_2$.
- 消费者对firm 2产品的需求量:
- $q_2(p_1, p_2) = a - p_2$ if $p_2 < p_1$; $= (a - p_2)/2$ if $p_1 = p_2$; $=0$, ow.
- firm i生产数量为q_i的成本是$C_i(q_i)=cq_i$.

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

标准式表述:

- 参与人集合: **{ Firm 1, Firm 2}**
- 策略集: $\boldsymbol{S_1}$**=[0, +∞),** $\boldsymbol{S_2}$**=[0, +∞)**
- 收益函数:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1) & \text{if } p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)(a - p_1)/2 & \text{if } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{if } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2) & \text{if } p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)(a - p_2)/2 & \text{if } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{if } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

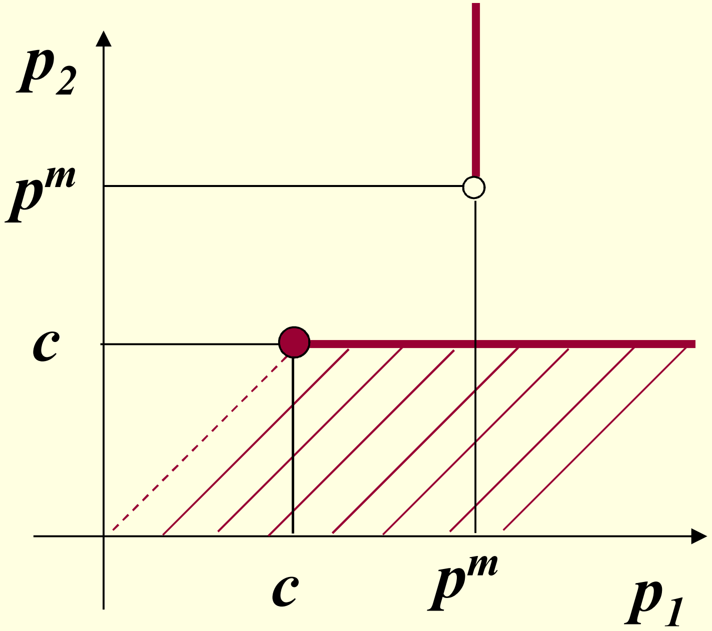
最优反应函数: $\boldsymbol{p^m = (a + c)/2}$

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \{p_1 : p_1 > p_2\} & \text{if } p_2 < c \\ \{p_1 : p_1 \geq p_2\} & \text{if } p_2 = c \\ \varnothing & \text{if } c < p_2 < p^m \\ \varnothing & \text{if } p_2 = p^m \\ p^m & \text{if } p^m < p_2 \end{cases}$$

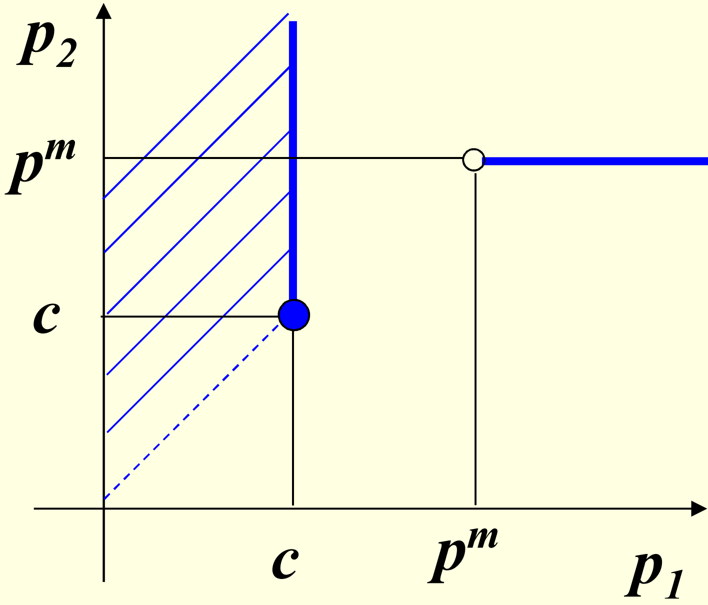
$$B_2(p_1) = \begin{cases} \{p_2 : p_2 > p_1\} & \text{if } p_1 < c \\ \{p_2 : p_2 \geq p_1\} & \text{if } p_1 = c \\ \varnothing & \text{if } c < p_1 < p^m \\ \varnothing & \text{if } p_1 = p^m \\ p^m & \text{if } p^m < p_1 \end{cases}$$

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

最优反应函数:



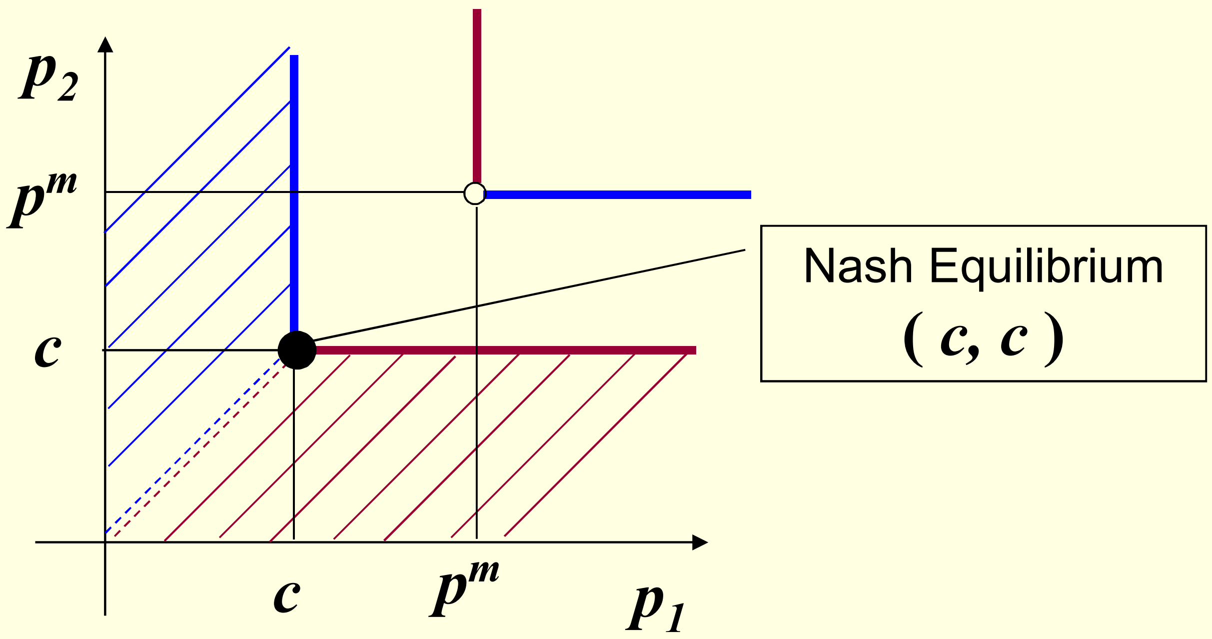
Firm 1's best response to Firm 2's p_2



Firm 2's best response to Firm 1's p_1

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

最优反应函数:



The problems of commons

- 村庄里有n个农民. 每年夏天,所有村民都在村庄公共的草地上放牧.
- 用 g_i 表示farmer i放养羊的头数.
- 购买和照看一只羊的成本为c, c不随一户村民拥有羊的数目多少而变化.
- 每只羊的价值是$v(G)$, 其中
  $G = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$
- 草地可以放牧羊的总数有一个上限. 即,
  $v(G)>0$ if $G < G_{max}$, and $v(G)=0$ if $G \geq G_{max}$.
- 假定$v(G)$: $v'(G) < 0$ and $v''(G) < 0$.
- 每年春天, 所有的村民同时选择放养多少只羊.

The problems of commons

标准式表述:

- 参与人集合: **{ Farmer 1, ... Farmer n}**
- 策略集: $S_i=[0, G_{max})$, **for** $i=1, 2, \ldots, n$
- 收益函数:

  $u_i(g_1, \ldots, g_n)=g_i\, v(g_1 + \ldots + g_n) - c\, g_i$

  for $i = 1, 2, \ldots, n$.

The problems of commons

- 如何找到纳什均衡
  - 找到 $(g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*)$，其中 g_i^* 是farmer *i*对其他村民选择的最优反应.
  - 即, g_1^* 是以下问题的解
    Max $u_1(g_1, g_2^*, ..., g_n^*)= g_1\, v(g_1 + g_2^* ...+ g_n^*) - c\, g_1$
    subject to $0 \le g_1 < G_{max}$

    而g_2^*是以下问题的解
    Max $u_2(g_1^*, g_2, g_3^*, ..., g_n^*)= g_2 v(g_1^*+g_2+g_3^*+ ...+ g_n^*)-cg_2$
    subject to $0 \le g_2 < G_{max}$

    ....

The problems of commons

- 如何找到纳什均衡
  - g_n*是以下问题的解
    Max $u_n(g_1^*, ..., g_{n-1}^*, g_n) = g_n v(g_1^* + ... + g_{n-1}^* + g_n) - c g_n$
    subject to $0 \le g_n < G_{max}$

    ....

The problems of commons

- FOCs:

$$v(g_1 + g_2^* + \ldots + g_n^*) + g_1 v'(g_1 + g_2^* + \ldots + g_n^*) - c = 0$$

$$v(g_1^* + g_2 + g_3^* + \ldots + g_n^*) + g_2 v'(g_1^* + g_2 + g_3^* + \ldots + g_n^*) - c = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$v(g_1^* + \ldots + g_{n-1}^* + g_n) + g_n v'(g_1^* + \ldots + g_{n-1}^* + g_n) - c = 0$$

The problems of commons

- 如何找到纳什均衡
  - $(g_1*, g_2*, ..., g_n*)$ 是一个纳什均衡，如果

$$v(g_1 * + g_2 * + ... + g_n *) + g_1 v'(g_1 * + g_2 * + ... + g_n *) - c = 0$$

$$v(g_1 * + g_2 * + g_3 * + ... + g_n *) + g_2 v'(g_1 * + g_2 * + g_3 * + ... + g_n *) - c = 0$$

....

$$v(g_1 * + ... + g_{n-1} * + g_n *) + g_n v'(g_1 * + ... + g_{n-1} * + g_n *) - c = 0$$

The problems of commons

- 把所有*n*个村民的FOC加总，再除以n，得到

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0$$

$$\text{where } G^* = g_1^* + g_2^* + \ldots + g_n^*$$

The problems of commons

- 社会问题

$$\text{Max} \quad Gv(G) - Gc$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le G < G_{\max}$$

$$\text{FOC}:$$
$$v(G) + Gv'(G) - c = 0$$

Hence, the optimal solution G^{**} satisfies

$$v(G^{**}) + G^{**}v'(G^{**}) - c = 0$$

The problems of commons

$$v(G^*)+\frac{1}{n}G^*v'(G^*)-c=0$$

$$v(G^{**})+G^{**}v'(G^{**})-c=0$$

$$G^* > G^{**}?$$

证明：参见课本P22-23.

The problems of commons

- 故事的寓意
  - 外部性和产权
  - 全局治理