Static (or Simultaneous-Move) Games of Incomplete Information-Chapter 3

Bayesian Nash Equilibrium

Outline of Static Games of Incomplete Information

- *Introduction to static games of incomplete information*
- Normal-form (or strategic-form) representation of static Bayesian games
- Bayesian Nash equilibrium
- Applications---Auction

a static game of incomplete information

- 什么是不完全信息静态博弈?
- 1. 不完全信息的囚徒困境
- 2. 不完全信息的Cournot双头垄断
- 3. 不完全信息的性别战
- 4. 首价密封拍卖（First-price, sealed-bid auction）

Static (or simultaneous-move) games of complete information

- 参与人集（至少两个参与人）
- 每个参与人的策略/行动集
- 每个参与人策略组合的收益，或每个参与人对策略组合的偏好？Payoffs received by each player for the combinations of the strategies, or for each player, preferences over the combinations of the strategies
- 所有这些是确定性的，且为每个参与人的*共同知识*（*common knowledge*）.

Static (or simultaneous-move) games of INCOMPLETE information

- 收益不再是确定的（不完全信息），尽管某些随机变量的分布仍为共同知识。

- 不完全信息意味着
  - 至少有一个参与人不能准确的知道某个参数变量的值（如其他参与人的类型，type ）

- 不完全信息静态博弈也被称为*静态贝叶斯博弈*（*static Bayesian games* ）

Prisoners' dilemma of complete information

- 两名犯罪嫌疑人被捕并受到指控，他们被关入不同的牢室。但是警方并无充足证据.
- 两名犯罪嫌疑人被告知以下政策:
  - 如果两人都不坦白，将均被判为轻度犯罪，入狱一个月.
  - 如果双方都坦白，都将被判入狱六个月.
  - 如果一人招认而另一人拒不坦白，招认的一方将马上获释，而另一人将判入狱九个月.

		Prisoner 2	
		Mum	Confess
Prisoner 1	Mum	-1 , -1	-9 , <u>0</u>
	Confess	<u>0</u> , -9	<u>-6</u> , <u>-6</u>

Prisoners' dilemma of incomplete information

- Prisoner 1总是理性的（自利的，selfish ）.
- Prisoner 2可能是理性的（自利的） ,也可能是利他的（altruistic ）, 这取决于他是否高兴（happy）.
- 如果他是利他的，那么他更偏好于mum，他认为 “confess” 等于额外 “入狱四个月” .
- Prisoner 1不能确切的知道 prisoner 2是理性的还是利他的, 但是他推断（believes ） prisoner 2理性的概率为 0.8, 利他的概率为 0.2.

Payoffs if prisoner 2 is altruistic

		Prisoner 2: Mum	Prisoner 2: Confess
Prisoner 1	Mum	-1 , <u>-1</u>	-9 , -4
	Confess	<u>0</u> , <u>-9</u>	<u>-6</u> , -10

Prisoners' dilemma of incomplete information (continued)

- 给定prisoner 1关于prisoner 2的推断（ belief ）, prison 1 应该选择什么策略?
- 如果prisoner 2 是理性或利他的，他应该分别选择什么策略?

Payoffs if prisoner 2 is <u>rational</u>

Prisoner 2

		Mum	Confess
Prisoner 1	Mum	-1 , -1	-9 , <u>0</u>
	Confess	<u>0</u> , -9	<u>-6</u> , <u>-6</u>

Payoffs if prisoner 2 is <u>altruistic</u>

Prisoner 2

		Mum	Confess
Prisoner 1	Mum	-1 , <u>-1</u>	-9 , -4
	Confess	<u>0</u> , <u>-9</u>	<u>-6</u> , -10

Prisoners’ dilemma of incomplete information (continued)

- 解:
  - Prisoner 1选择 confess, 给定他对prisoner 2 的推断
  - Prisoner 2如果是理性，选择 confess；如果是利他的，则选择 mum
- 这可以写成 (Confess, (Confess if rational, Mum if altruistic))
- Confess 是 prisoner 1对prisoner 2的选择(Confess if rational, Mum if altruistic)的最优反应.
- (Confess if rational, Mum if altruistic) 是 prisoner 2对prisoner 1选择Confess的最优反应
- 这里的一个纳什均衡被称为**贝叶斯纳什均衡**（Bayesian Nash equilibrium ）

Cournot duopoly model of complete information

- 标准式表述:
  - 参与人集: **{ Firm 1, Firm 2}**
  - 策略集: $S_1=[0, +\infty), S_2=[0, +\infty)$
  - 收益函数:

  $u_1(q_1, q_2)=q_1(a-(q_1+q_2)-c)$,
  $u_2(q_1, q_2)=q_2(a-(q_1+q_2)-c)$

- 所有这些信息是共同知识

Cournot duopoly model of incomplete information

- 一种同质的产品仅仅由两家企业进行生产: firm 1 和firm 2. 产量分别用q_1 和q_2表示.
- 它们同时选择它们的产量.
- 市场价格: $P(Q)=a-Q$, 这里 a 是常数并且 $Q=q_1+q_2$.
- Firm 1的成本函数: $C_1(q_1)=cq_1$.
- 以上均为共同知识

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

- Firm 2的边际成本依赖于某个只有它自己知道的因素(如技术水平).它的边际成本可能是
  - 较高（HIGH）: 成本函数: $C_2(q_2)=c_H q_2$.
  - 较低（LOW）: 成本函数: $C_2(q_2)=c_L q_2$.
- 在生产前, firm 2能够观察到这个因素并且准确知道它的边际成本处于什么水平.
- 但是, firm 1不能准确知道 firm 2的成本. 也就是说,它不能确定 firm 2的收益.
- Firm 1推断 firm 2的成本函数
  - 以θ的概率为$C_2(q_2)=c_H q_2$
  - 以1–θ的概率为$C_2(q_2)=c_L q_2$.
- 以上均为共同知识

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

不完全信息 Cournot 双头垄断模型的解

Firm 2 确切的知道它的边际成本是高是低.

- 如果它的边际成本较高, 即$C_2(q_2)=c_H q_2$,那么给定任意q_1, 它将解

$$\begin{array}{ll} Max & q_2[a-(q_1+q_2)-c_H] \\ s.t. & q_2 \geq 0 \end{array}$$

- FOC: $a-q_1-2q_2-c_H=0 \;\Rightarrow\; q_2(c_H)=\frac{1}{2}(a-q_1-c_H)$
- $q_2(c_H)$ 是 firm 2 对q_1的最优反应,如果它的边际成本较高.

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

Firm 2 确切的知道它的边际成本是高是低.

- 如果它的边际成本较低,即$C_2(q_2)=c_L q_2$, 那么给定任意q_1, 它将解

$$\begin{array}{ll} Max & q_2[a-(q_1+q_2)-c_L] \\ s.t. & q_2 \geq 0 \end{array}$$

- FOC: $a-q_1-2q_2-c_L=0 \quad \Rightarrow \quad q_2(c_L)=\frac{1}{2}(a-q_1-c_L)$

- $q_2(c_L)$ 是 firm 2 对q_1的最优反应, 如果它的边际成本较低

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

- Firm 1 确切的知道它的成本函数$C_1(q_1)=cq_1$.
- Firm 1 不能确切的知道 firm 2 的边际成本是高是低.
- 但是它推断 firm 2 的成本函数以θ的概率为$C_2(q_2)=c_H q_2$, 以$1-\theta$ 的概率为$C_2(q_2)=c_L q_2$
- 也就是说, 它知道 firm 2 产量为$q_2(c_H)$的概率是θ, 产量为$q_2(c_L)$的概率是$1-\theta$. 所以它解

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \theta \times q_1[a-(q_1+q_2(c_H))-c] \\
& +(1-\theta)\times q_1[a-(q_1+q_2(c_L))-c] \\
s.t. \quad & q_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

- **Firm 1 的问题:**

$$\begin{aligned} Max \quad & \theta \times q_1[a-(q_1+q_2(c_H))-c] \\ & +(1-\theta)\times q_1[a-(q_1+q_2(c_L))-c] \\ s.t. \quad & q_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- **FOC:**

$$\theta[a-2q_1-q_2(c_H)-c]+(1-\theta)[a-2q_1-q_2(c_L)-c]=0$$

所以， $q_1=\dfrac{\theta[a-q_2(c_H)-c]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c]}{2}$

- q_1 是 **firm 1** 对以下推断的最优反应：**firm 2** 以概率θ选择 $q_2(c_H)$, 以概率$1-\theta$选择$q_2(c_L)$

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

- 现在我们有

$$q_2(c_H)=\frac{1}{2}(a-q_1-c_H)$$

$$q_2(c_L)=\frac{1}{2}(a-q_1-c_L)$$

$$q_1=\frac{\theta[a-q_2(c_H)-c]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c]}{2}$$

- 我们有三个方程和三个未知数. 从而有

Cournot duopoly model of incomplete information (continued)

$$q_2^*(c_H)=\frac{1}{3}(a-2c_H+c)+\frac{1-\theta}{6}(c_H-c_L)$$

$$q_2^*(c_L)=\frac{1}{3}(a-2c_L+c)-\frac{\theta}{6}(c_H-c_L)$$

$$q_1^*=\frac{a-2c+\theta c_H+(1-\theta)c_L}{3}$$

- **Firm 1 选择 q_1^***
- **Firm 2 如果边际成本较高则选择$q_2^*(c_H)$，如果边际成本较低则选择$q_2^*(c_L)$.**
- **这可以写成(q_1^*, ($q_2^*(c_H)$,$q_2^*(c_L)$))**
- **一个企业的产量是另一个企业产量的最优反应**
- **一个纳什均衡解称为贝叶斯纳什均衡.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version one) (continued)

$$q_2^*(c_H)=\frac{1}{3}(a-2c_H+c)+\frac{1-\theta}{6}(c_H-c_L)$$

$$q_2^*(c_L)=\frac{1}{3}(a-2c_L+c)-\frac{\theta}{6}(c_H-c_L)$$

$$q_1^*=\frac{a-2c+\theta c_H+(1-\theta)c_L}{3}$$

- 这可以写成$(q_1^*, (q_2^*(c_H), q_2^*(c_L)))$
- Firm 1 选择q_1^*，它是 firm 2 的 $(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$(注意这里存在概率)的最优反应.
- 如果 firm 2 的边际成本较高（HIGH），那么 firm 2 选择$q_2^*(c_H)$，它是对 firm 1 的q_1^*的最优反应.
- 如果 firm 2 的边际成本较低（LOW），那么 firm 2 选择$q_2^*(c_L)$，它是对 firm 1 的q_1^*的最优反应.
- **这个纳什均衡解称为*贝叶斯纳什均衡*.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version two)

- 一种同质的产品仅仅由两家企业进行生产: firm 1 和firm 2. 产量分别用q_1 和q_2表示.
- 它们同时选择它们的产量.
- 市场价格: $P(Q)=a-Q$, 这里 a 是常数并且 $Q=q_1+q_2$.
- 以上均为共同知识

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- Firm 2的边际成本依赖于某个只有它自己知道的因素(如技术水平).它的边际成本可能是
  - 较高（HIGH）: 成本函数: $C_2(q_2)=c_H q_2$.
  - 较低（LOW）:成本函数: $C_2(q_2)=c_L q_2$.
- 在生产前, firm 2能够观察到这个因素并且准确知道它的边际成本处于是高是低.
- 但是, firm 1不能准确知道 firm 2的成本. 也就是说,它不能确定 firm 2的收益.
- Firm 1推断 firm 2的成本函数
  - 以θ的概率为$C_2(q_2)=c_H q_2$
  - 以$1-\theta$的概率为$C_2(q_2)=c_L q_2$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- Firm 1的边际成本也依赖于某个只有它自己知道的独立（independent ）因素.它的边际成本可能是
  - 较高（HIGH）: 生产函数: $C_1(q_1)=c_H q_1$.
  - 较低（LOW）: 生产函数: $C_1(q_1)=c_L q_1$.
- 在生产前, firm 1能够观察到这个因素并且准确知道它的边际成本是高是低.
- 但是, firm 2不能准确知道 firm 1的成本. 也就是说,它不能确定 firm 1的收益.
- Firm 2推断 firm 1的生产函数
  - 以θ的概率为$C_1(q_1)=c_H q_1$
  - 以$1-\theta$的概率为$C_1(q_1)=c_L q_1$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- Firm 1 在生产前准确的知道它的边际成本是高是低.
- Firm 1 不能准确的知道 firm 2 的边际成本是高是低.
- 但是它推断 firm 2 的成本函数
  - 以概率θ为$C_2(q_2)=c_H q_2$ (这里它选择$q_2(c_H)$).
  - 以概率$1-\theta$为$C_2(q_2)=c_L q_2$ (这里它选择$q_2(c_L)$).
- 现在我们给定 firm 1 对 firm 2 的推断来解 firm 1 的问题.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

Firm 1 准确的知道它的成本是高是低.

- 如果它的边际成本较高（**HIGH**）, 即$C_1(q_1)=c_H q_1$, 那么, 给定它对 **firm 2** 的推断,它将解

$$\begin{aligned} &Max \quad \theta\times q_1[a-(q_1+q_2(c_H))-c_H]+(1-\theta)\times q_1[a-(q_1+q_2(c_L))-c_H] \\ &s.t. \quad\ q_1\geq 0 \end{aligned}$$

- **FOC:**

$$\theta[a-2q_1-q_2(c_H)-c_H]+(1-\theta)[a-2q_1-q_2(c_L)-c_H]=0$$

从而，$q_1(c_H)=\dfrac{\theta[a-q_2(c_H)-c_H]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c_H]}{2}$

- 如果 **firm 1** 的边际成本较高，$q_1(c_H)$是 **firm 1** 对以下推断的最优反应：**firm 2** 以概率θ 选择$q_2(c_H)$, 以概率$1-\theta$选择$q_2(c_L)$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

Firm 1 准确的知道它的边际成本是高是低.

- 如果它的边际成本较低（**LOW**）,即 $C_1(q_1)=c_L q_1$, 那么, 给定它对 **firm 2** 的推断,它将解

$$Max \quad \theta\times q_1[a-(q_1+q_2(c_H))-c_L]+(1-\theta)\times q_1[a-(q_1+q_2(c_L))-c_L]$$

$$s.t. \quad q_1\geq 0$$

- **FOC:**

$$\theta[a-2q_1-q_2(c_H)-c_L]+(1-\theta)[a-2q_1-q_2(c_L)-c_L]=0$$

从而, $q_1(c_L)=\dfrac{\theta[a-q_2(c_H)-c_L]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c_L]}{2}$

- 如果 **firm 1** 边际成本较低, $q_1(c_L)$是 **firm 1** 对以下推断的最优反应: **firm 2** 以概率θ选择$q_2(c_H)$, 以概率$1-\theta$选择$q_2(c_L)$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- Firm 2 生产前准确的知道它的边际成本是高是低.
- Firm 2 不能准确的知道 firm 1 的边际成本是高是低.
- 但是它推断 firm 1 的成本函数
  - 以概率θ为$C_1(q_1)=c_H q_1$ (它选择$q_1(c_H)$).
  - 以概率$1-\theta$为$C_1(q_1)=c_L q_1$ (它选择$q_1(c_L)$).
- 现在给定 firm 2 对 firm 1 的推断，我们来解 firm 2 的问题.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

Firm 2 准确的知道它的边际成本是高是低.

- 如果它的边际成本较高, 即$C_2(q_2)=c_H q_2$, 那么, 给定它对 firm 1 的推断, 它将解

$$\begin{aligned} &Max \quad \theta\times q_2[a-(q_1(c_H)+q_2)-c_H]+(1-\theta)\times q_2[a-(q_1(c_L)+q_2)-c_H] \\ &s.t. \quad\ \ q_2\ge 0 \end{aligned}$$

- FOC:

$$\theta[a-q_1(c_H)-2q_2-c_H]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-2q_2-c_H]=0$$

从而, $q_2(c_H)=\dfrac{\theta[a-q_1(c_H)-c_H]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-c_H]}{2}$

- 如果 firm 2 边际成本较高,$q_2(c_H)$是 firm 2 对以下推断的最优反应：firm 1 以概率θ 选择$q_1(c_H)$, 以概率$1-\theta$选择$q_1(c_L)$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

Firm 2 准确的知道它的边际成本是高是低.

- 如果它的边际成本较低, 即 $C_2(q_2)=c_L q_2$, 那么, 给定它对 **firm 1** 的推断, 它将解

$$\begin{aligned} &Max \quad \theta\times q_2[a-(q_1(c_H)+q_2)-c_L]+(1-\theta)\times q_2[a-(q_1(c_L)+q_2)-c_L] \\ &s.t. \quad\ q_2\geq 0 \end{aligned}$$

- **FOC:**

$$\theta[a-q_1(c_H)-2q_2-c_L]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-2q_2-c_L]=0$$

从而， $q_2(c_L)=\dfrac{\theta[a-q_1(c_H)-c_L]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-c_L]}{2}$

- 如果 **firm 2** 的边际成本较低, $q_2(c_L)$ 是 **firm 2** 对以下推断的最优反应： **firm 1** 以概率 θ 选择 $q_1(c_H)$, 以概率 $1-\theta$ 选择 $q_1(c_L)$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- 现在我们有

$$q_1(c_H)=\frac{\theta[a-q_2(c_H)-c_H]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c_H]}{2}$$

$$q_1(c_L)=\frac{\theta[a-q_2(c_H)-c_L]+(1-\theta)[a-q_2(c_L)-c_L]}{2}$$

$$q_2(c_H)=\frac{\theta[a-q_1(c_H)-c_H]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-c_H]}{2}$$

$$q_2(c_L)=\frac{\theta[a-q_1(c_H)-c_L]+(1-\theta)[a-q_1(c_L)-c_L]}{2}$$

- 这是一个对称模型. 所以 $q_1(c_H)=q_2(c_H)$， $q_1(c_L)=q_2(c_L)$. 这里有四个方程，四个未知数，解这四个方程可得.

$$q_1^*(c_H)=q_2^*(c_H)=\frac{1}{3}(a-c_H)+\frac{1-\theta}{6}(c_H-c_L)$$

$$q_1^*(c_L)=q_2^*(c_L)=\frac{1}{3}(a-c_L)-\frac{\theta}{6}(c_H-c_L)$$

Cournot duopoly model of incomplete information (version two) (continued)

- 这可以写成$((q_1^*(c_H), q_1^*(c_L)), (q_2^*(c_H), q_2^*(c_L)))$

- 如果 **firm 1** 的边际成本较高，那么它选择$q_1^*(c_H)$，它是对 **firm 2** 的$(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$ (及其概率)的最优反应.
- 如果 **firm 1** 的边际成本较低，那么它选择$q_1^*(c_L)$，它是对 **firm 2** 的$(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$ (及其概率)的最优反应.
- 如果 **firm 2** 的边际成本较高，那么它选择$q_2^*(c_H)$，它是对 **firm 1** 的$(q_1^*(c_H), q_1^*(c_L))$ (及其概率)的最优反应.
- 如果 **firm 2** 的边际成本较低，那么它选择$q_2^*(c_L)$，它是对 **firm 1** 的$(q_1^*(c_H), q_1^*(c_L))$ (及其概率)的最优反应.

- 这个纳什均衡解称为贝叶斯纳什均衡.

battle of the sexes

- 在分开的工作场所，Chris 和Pat 必须决定晚上是看歌剧还是去看拳击.
- Chris 和 Pat 都知道以下信息:
  - 两个人都愿意在一起度过这个夜晚.
  - 但是Chris更喜欢歌剧.
  - Pat则更喜欢拳击.

		Pat: Opera	Pat: Prize Fight
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
	Prize Fight	0 , 0	1 , 2

Battle of the sexes with incomplete information (version one)

- 现在Pat的偏好依赖于他是否高兴（happy ）.
- 如果他高兴，那么他的偏好仍然是拳击.
- 如果他不高兴，那么他宁愿晚上自己独处，他的偏好见下面的表格.
- Chris不知道 Pat 是否高兴. 但是Chris推断Pat以0.5的概率高兴，以0.5的概率不高兴

Payoffs if Pat is unhappy

		Pat: Opera	Pat: Prize Fight
Chris	Opera	2 , 0	0 , 2
	Prize Fight	0 , 1	1 , 0

Battle of the sexes with incomplete information (version one) (continued)

- 怎样找到解?

Payoffs if Pat is happy with probability 0.5

Pat

Chris		Opera	Prize Fight
	Opera	2 , 1	0 , 0
	Prize Fight	0 , 0	1 , 2

Payoffs if Pat is unhappy with probability 0.5

Pat

Chris		Opera	Prize Fight
	Opera	2 , 0	0 , 2
	Prize Fight	0 , 1	1 , 0

Battle of the sexes with incomplete information (version one) (continued)

- 最优反应
  - 如果Chris选择 opera 那么Pat的最优反应: opera（如果他高兴）, prize fight（如果他不高兴）
  - 假设Pat高兴时选择 opera, 不高兴时选择prize fight. Chris的最优反应是什么?
    - 考虑Chris选择 opera的情形： 如果此时Pat高兴，则Chris的收益为2； 如果 Pat不高兴，则Chris的收益为0. 从而Chris的期望收益（expected payoff ）是$2\times0.5+0\times0.5=1$
    - 考虑Chris选择 prize fight的情形：如果此时Pat高兴，则Chris的收益为0,如果 Pat不高兴， 则Chris的收益为1.从而Chris的期望收益是$0\times0.5+1\times0.5=0.5$
    - 由于 1>0.5, Chris的最优反应是opera
  - 一个贝叶斯纳什均衡: (opera, (opera if happy and prize fight if unhappy))

Battle of the sexes with incomplete information (version one) (continued)

- 最优反应
  - 如果Chris选择 prize fight 那么Pat的最优反应: prize fight （如果他高兴）, opera （如果他不高兴）
  - 假设Pat高兴时选择 prize fight, 不高兴时选择opera. Chris的最优反应是什么?
    - 考虑Chris选择 opera的情形： 如果此时Pat高兴，则Chris的收益为0； 如果 Pat不高兴， 则Chris的收益为2.从而Chris的期望收益是$0\times0.5+2\times0.5=1$
    - 考虑Chris选择 prize fight的情形：如果此时Pat高兴，则Chris的收益为1 ,如果 Pat不高兴， 则Chris的收益为0.从而Chris的期望收益是$1\times0.5+0\times0.5=0.5$
    - 由于1>0.5, Chris的最优反应是opera
  - (Prize fight, (prize fight if happy and opera if unhappy)) 不是一个贝叶斯纳什均衡.

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- Firm 2的成本依赖于某个只有它自己知道的因素 (如技术水平). 她的成本可能
  - 较高（HIGH）: 成本函数: $C_2(q_2)=c_H q_2$.
  - 较低（LOW）: 成本函数: $C_2(q_2)=c_L q_2$.
- Firm 1的成本也依赖于某个其他只有它自己知道的独立或不独立的 (independent or dependent)因素. 它的成本可能
  - 较高（HIGH）: 成本函数: $C_1(q_1)=c_H q_1$.
  - 较低（LOW）: 成本函数: $C_1(q_1)=c_L q_1$.

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- **Firm 1** 的产量取决于它的成本. 它选择
  - $q_1(c_H)$ 如果它的成本较高
  - $q_1(c_L)$ 如果它的成本较低
- **Firm 2** 的产量也取决于它的成本. 它选择
  - $q_2(c_H)$如果它的成本较高
  - $q_2(c_L)$如果它的成本较低

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- 生产前, firm 1 准确的知道它的成本是高是低.
- 但是, firm 1 不能准确的知道 firm 2 成本. 即, 它不能确定 firm 2 的收益.
- Firm 1 推断*如果它的成本较高*，那么 firm 2 的成本函数是
  - $C_2(q_2)=c_H q_2$ 概率是 $p_1(c_2=c_H \mid c_1=c_H)$,
  - $C_2(q_2)=c_L q_2$ 概率是 $p_1(c_2=c_L \mid c_1=c_H)$.
- Firm 1 推断*如果它的成本较低*，那么 firm 2 的成本函数是
  - $C_2(q_2)=c_H q_2$ 概率是 $p_1(c_2=c_H \mid c_1=c_L)$,
  - $C_2(q_2)=c_L q_2$ 概率是 $p_1(c_2=c_L \mid c_1=c_L)$.

- 例: $p_1(c_2=c_H \mid c_1=c_H)=p_1(c_2=c_H \mid c_1=c_L)=\theta$
  $p_1(c_2=c_L \mid c_1=c_H)=p_1(c_2=c_L \mid c_1=c_L)=1-\theta$ 就变成了版本二.

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- 生产前, firm 2 准确的知道它的成本是高是低.
- 但是, firm 2 不能确切的知道 firm 1 的成本. 即, 它不能确定 firm 1 的收益.
- Firm 2 推断*如果它的成本较高*, 那么 firm 1 的成本函数是
  - $C_1(q_1)=c_H q_1$ 概率是 $p_2(c_1=c_H \mid c_2=c_H)$,
  - $C_1(q_1)=c_L q_1$ 概率是 $p_2(c_1=c_L \mid c_2=c_H)$.
- Firm 2 推断*如果它的成本较低*, 那么 firm 1 的成本函数是
  - $C_1(q_1)=c_H q_1$ 概率是 $p_2(c_1=c_H \mid c_2=c_L)$,
  - $C_1(q_1)=c_L q_1$ 概率是 $p_2(c_1=c_L \mid c_2=c_L)$.

- 例: $p_2(c_1=c_H \mid c_2=c_H)=p_2(c_1=c_H \mid c_2=c_L)=\theta$
  $p_2(c_1=c_L \mid c_2=c_H)=p_2(c_1=c_L \mid c_2=c_L)=1-\theta$ 就变成了版本二.

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

Firm 1 knows exactly its cost is high or low.

- **If its cost is HIGH, i.e.** $C_1(q_1) = c_H q_1$**, then, given its belief on firm 2, it will solve**

$$
\begin{aligned}
Max \quad & p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_H) \times \boxed{q_1[a - (q_1 + q_2(c_H)) - c_H]} \\
& + p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_H) \times \boxed{q_1[a - (q_1 + q_2(c_L)) - c_H]} \\
s.t. \quad & q_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

$u_1(q_1, q_2(c_H); c_H)$

$u_1(q_1, q_2(c_L); c_H)$

- **FOC:**

$$
\begin{aligned}
& p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_H)[a - 2q_1 - q_2(c_H) - c_H] \\
& + p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_H)[a - 2q_1 - q_2(c_L) - c_H] = 0
\end{aligned}
$$

Hence,

$$
q_1(c_H) = \frac{a - c_H - p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_H) q_2(c_H) - p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_H) q_2(c_L)}{2}
$$

- $q_1(c_H)$ **is firm 1's best response to its belief (probability) on firm 2's (**$q_2(c_H)$**,** $q_2(c_L)$**) if firm 1's cost is HIGH.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

Firm 1 knows exactly its cost is high or low.

- **If its cost is LOW, i.e.** $C_1(q_1) = c_L q_1$**, then, given its belief on firm 2 it will solve**

$$u_1(q_1,\, q_2(c_H);\, c_L)$$

$$\begin{aligned} Max \quad & p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_L) \times \boxed{q_1[a - (q_1 + q_2(c_H)) - c_L]} \\ & + p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_L) \times \boxed{q_1[a - (q_1 + q_2(c_L)) - c_L]} \\ s.t. \quad & q_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$u_1(q_1,\, q_2(c_L);\, c_L)$$

- **FOC:**

$$\begin{aligned} & p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_L)[a - 2q_1 - q_2(c_H) - c_L] \\ & \quad + p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_L)[a - 2q_1 - q_2(c_L) - c_L] = 0 \end{aligned}$$

Hence,

$$q_1(c_L) = \frac{a - c_L - p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_L) q_2(c_H) - p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_L) q_2(c_L)}{2}$$

- $q_1(c_L)$ **is firm 1's best response to its belief (probability) on firm 2's (**$q_2(c_H)$**,** $q_2(c_L)$**) if firm 1's cost is LOW.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

Firm 2 knows exactly its cost is high or low.

- **If its cost is HIGH, i.e.** $C_2(q_2) = c_H q_2$**, then, given its belief on firm 1, it will solve**

$u_2(q_1(c_H), q_2; c_H)$

$$
\begin{aligned}
Max \quad & p_2(c_1 = c_H \mid c_2 = c_H) \times \boxed{q_2[a - (q_1(c_H) + q_2) - c_H]} \\
& + p_2(c_1 = c_L \mid c_2 = c_H) \times \boxed{q_2[a - (q_1(c_L) + q_2) - c_H]} \\
s.t. \quad & q_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$u_2(q_1(c_L), q_2; c_H)$

- **FOC:**

$$
\begin{aligned}
& p_2(c_1 = c_H \mid c_2 = c_H)[a - q_1(c_H) - 2q_2 - c_H] \\
& + p_2(c_1 = c_L \mid c_2 = c_H)[a - q_1(c_L) - 2q_2 - c_H] = 0
\end{aligned}
$$

Hence,

$$
q_2(c_H) = \frac{a - c_H - p_2(c_1 = c_H \mid c_2 = c_H)q_1(c_H) - p_2(c_1 = c_L \mid c_2 = c_H)q_1(c_L)}{2}
$$

- $q_2(c_H)$ **is firm 2's best response to its belief (probability) on firm 1's (**$q_1(c_H), q_1(c_L)$**) if firm 2's cost is HIGH.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

Firm 2 knows exactly its cost is high or low.

- **If its cost is LOW, i.e. $C_2(q_2)=c_Lq_2$, then, given its belief on firm 1 it will solve**

$u_2(q_1(c_H), q_2; c_L)$

$$\begin{aligned} Max \quad & p_2(c_1=c_H\,|\,c_2=c_L)\times \boxed{q_2[a-(q_1(c_H)+q_2)-c_L]} \\ & +p_2(c_1=c_L\,|\,c_2=c_L)\times \boxed{q_2[a-(q_1(c_L)+q_2)-c_L]} \\ s.t. \quad & q_2\ge 0 \end{aligned}$$

$u_2(q_1(c_L), q_2; c_L)$

- **FOC:**

$$\begin{aligned} & p_2(c_1=c_H\,|\,c_2=c_L)[a-q_1(c_H)-2q_2-c_L] \\ & +p_2(c_1=c_L\,|\,c_2=c_L)[a-q_1(c_L)-2q_2-c_L]=0 \end{aligned}$$

Hence,

$$q_2(c_L)=\frac{a-c_L-p_2(c_1=c_H\,|\,c_2=c_L)q_1(c_H)-p_2(c_1=c_L\,|\,c_2=c_L)q_1(c_L)}{2}$$

- $q_2(c_L)$ **is firm 2's best response to its belief (probability) on firm 1's ($q_1(c_H),q_1(c_L)$) if firm 2's cost is LOW.**

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- 现在我们有四个方程，四个未知数.

$$q_1(c_H)=\frac{a-c_H-p_1(c_2=c_H\mid c_1=c_H)q_2(c_H)-p_1(c_2=c_L\mid c_1=c_H)q_2(c_L)}{2}$$

$$q_1(c_L)=\frac{a-c_L-p_1(c_2=c_H\mid c_1=c_L)q_2(c_H)-p_1(c_2=c_L\mid c_1=c_L)q_2(c_L)}{2}$$

$$q_2(c_H)=\frac{a-c_H-p_2(c_1=c_H\mid c_2=c_H)q_1(c_H)-p_2(c_1=c_L\mid c_2=c_H)q_1(c_L)}{2}$$

$$q_2(c_L)=\frac{a-c_L-p_2(c_1=c_H\mid c_2=c_L)q_1(c_H)-p_2(c_1=c_L\mid c_2=c_L)q_1(c_L)}{2}$$

- 解这四个方程可以得到下面的贝叶斯纳什均衡.

$$\left(q_1^*(c_H),\ q_1^*(c_L)\right)$$
$$\left(q_2^*(c_H),\ q_2^*(c_L)\right)$$

Cournot duopoly model of incomplete information (version three) (continued)

- 贝叶斯纳什均衡：$((q_1^*(c_H), q_1^*(c_L)), (q_2^*(c_H), q_2^*(c_L)))$

- 如果 firm 1 的边际成本较高，那么它选择$q_1^*(c_H)$，它是对 firm 2 的$(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$ (及其概率)的最优反应.
- 如果 firm 1 的边际成本较低，那么它选择$q_1^*(c_L)$，它是对 firm 2 的$(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$(及其概率)的最优反应.
- 如果 firm 2 的边际成本较高，那么它选择$q_2^*(c_H)$，它是对 firm 1 的$(q_1^*(c_H), q_1^*(c_L))$(及其概率)的最优反应.
- 如果 firm 2 的边际成本较低，那么它选择$q_2^*(c_L)$，它是对 firm 1 的$(q_1^*(c_H), q_1^*(c_L))$(及其概率)的最优反应.

Normal-form representation of static Bayesian games

- 一个不完全信息 n 人静态博弈的标准式表述包括:
  - 一个有限参与人集合{1, 2, ..., *n*},
  - 参与人的行动集 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 以及
  - 他们的类型空间（type spaces）$T_1, \cdots, T_n$
  - 他们的推断 $p_1, \cdots, p_n$
  - 他们的收益函数 $u_1, \cdots, u_n$
  - 用 $G = \{A_1, \cdots, A_n; T_1, \cdots T_n; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 表示
- 评论:一个参与人的收益函数不但取决于 *n* 个参与人的行动，而且取决于她的类型.
- T_i 是 player *i* 的类型集（type set）.
- 例: $T_1 = \{c_H, c_L\}$, $T_2 = \{c_H, c_L\}$

Normal-form representation of static Bayesian games: payoffs

- Player *i* 的收益函数表述为:

  $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$ for $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n, t_i \in T_i$.

- 例: $u_1(q_1, q_2; c_H) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c_H]$

  $u_1(q_1, q_2; c_L) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c_L]$

- 每个参与人都知道她自己的类型. 就是说, 她知道她自己的收益函数.
- 每个参与人都可能不能确定其他参与人的类型. 等价的,她不能确定其他参与人的收益函数.

Normal-form representation of static Bayesian games: beliefs (probabilities)

- Player *i* 对其他参与人类型的推断, 表示为

$$p_i(t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n \mid t_i) \text{ for } t_1 \in T_1, t_2 \in T_2, ..., t_n \in T_n. \text{ or}$$

$$p_i(t_{-i} \mid t_i) \text{ where } t_{-i} = (t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n),\ t_1 \in T_1, t_2 \in T_2, ..., t_n \in T_n.$$

- Player *i* 的推断是条件概率

- 例:

$$p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_H)$$
$$p_1(c_2 = c_H \mid c_1 = c_L)$$
$$p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_H)$$
$$p_1(c_2 = c_L \mid c_1 = c_L)$$

海萨尼转换(the Harsanyi transformation)（p.116）

- 将不完全信息静态博弈转化为完全且不完美信息动态博弈.
- (1)引入虚拟的“自然”博弈方。自然赋予博弈各方的类型向量$t=(t_1, \ldots, t_n)$,其中t_i属于可行集T_i;
- (2)自然告知参与人i自己的类型t_i，但不告诉其他参与人的类型;
- (3)参与人同时选择行动，每一参与人i从可行集A_i中选择a_i;
- (4)除自然外，其余各方得到收益$u_i(a_1, \ldots, a_n; t_i)$

关于推断 $p_i(t_{-i}|t_i)$ (p.117)

- 自然根据先验的概率分布$p(t)$赋予各参与人类型向量$t=(t_1, \ldots, t_n)$,是共同知识
- 自然告知参与人i的类型t_i时，他可以根据贝叶斯法则计算其他参与人类型的条件概率，得出推断 $p_i(t_{-i}|t_i)$

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}$$

- 对T_i中的每一个t_i ，都可计算出 $p_i(t_{-i}|t_i)$

Strategy

- **In a static Bayesian game, a strategy for player *i* is a function** $s_i(t_i)$ for each $t_i \in T_i$.

$$s_i(t_i) : \forall t_i \in T_i \to A_i$$

- $s_i(t_i)$ **specifies what player *i* does for her each type** $t_i \in T_i$

- **Example: (**$q_1(c_H), q_1(c_L)$**) is a strategy for firm 1 in the Cournot model of incomplete information (version three).**

Bayesian Nash equilibrium: 2-player

- 在 2 人静态贝叶斯博弈$\{A_1, A_2; T_1, T_2; p_1, p_2; u_1, u_2\}$中, 策略 $s_1^*(\bullet), s_2^*(\bullet)$ 是纯策略贝叶斯纳什均衡，如果
  - 对 player 1 的每一种类型$t_1 \in T_1$, $s_1^*(t_1)$ 满足

$$\underset{a_1 \in A_1}{Max} \quad \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2^*(t_2); t_1) p_1(t_2 \mid t_1)$$

  - 对 player 2 的每一种类型$t_2 \in T_2$, $s_2^*(t_2)$ 满足

$$\underset{a_2 \in A_2}{Max} \quad \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), a_2; t_2) p_2(t_1 \mid t_2)$$

Bayesian Nash equilibrium: 2-player

- **In a static Bayesian 2-player game** $\{A_1, A_2; T_1, T_2; p_1, p_2; u_1, u_2\}$**, the strategies** $s_1^*(\bullet), s_2^*(\bullet)$ **are pure strategy Bayesian Nash equilibrium if for each *i* and *j*, (assume** $T_1 = \{t_{11}, t_{12}, ...\}, T_2 = \{t_{21}, t_{22}, ...\}$**)**

$s_1^*(t_{11})$

$s_1^*(t_{12})$

$\vdots$

$\vdots$

$\boxed{s_1^*(t_{1i})}$

$\vdots$

$s_1^*(t_{1n})$

$\vdots$

In the sense of expectation based on her belief

player 2's best response if her type is t_{2j}

player 1's best response if her type is t_{1i}

In the sense of expectation based on her belief

$s_2^*(t_{21})$

$s_2^*(t_{22})$

$\vdots$

$\boxed{s_2^*(t_{2j})}$

$\vdots$

$s_2^*(t_{2n})$

$\vdots$

battle of the sexes

- 在分开的工作场所，Chris 和Pat 必须决定晚上是看歌剧还是去看拳击.
- Chris 和 Pat 都知道以下信息:
  - 两个人都愿意在一起度过这个夜晚.
  - 但是Chris更喜欢歌剧.
  - Pat则更喜欢拳击.

		Pat: Opera	Pat: Prize Fight
Chris	Opera	<u>2</u> , <u>1</u>	0 , 0
	Prize Fight	0 , 0	<u>1</u> , <u>2</u>

Battle of the sexes with incomplete information (version two)

- Pat的偏好依赖于他是否高兴.如果他高兴，那么他的偏好仍然是拳击.
- 如果他不高兴，那么他宁愿晚上自己独处.
- Chris不知道 Pat 是不是高兴. 但是Chris推断Pat以0.5的概率高兴，以0.5的概率不高兴
- Chris的偏好也依赖于她是否高兴.如果她高兴，那么她的偏好仍然是歌剧.
- 如果她不高兴，那么她宁愿晚上自己独处.
- Pat不知道Chris是不是高兴. 但是 Pat 推断Chris以 2/3的概率高兴，以1/3的概率不高兴.

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

Chris is happy
Pat is happy

Chris \ Pat	Opera	Fight
Opera	2 , 1	0 , 0
Fight	0 , 0	1 , 2

Chris is happy
Pat is unhappy

Chris \ Pat	Opera	Fight
Opera	2 , 0	0 , 2
Fight	0 , 1	1 , 0

Chris is unhappy
Pat is happy

Chris \ Pat	Opera	Fight
Opera	0 , 1	2 , 0
Fight	1 , 0	0 , 2

Chris is unhappy
Pat is unhappy

Chris \ Pat	Opera	Fight
Opera	0 , 0	2 , 2
Fight	1 , 1	0 , 0

- 检查 ((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight if unhappy)) 是否是一个Bayesian NE

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

- 检查((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight if unhappy)) 是否是一个贝叶斯纳什均衡.
  - 如果 Chris 高兴，那么 Chris 对 Pat 的(Opera if happy, Fight is unhappy)的最优反应
    - 如果 Chris 选择 Opera，那么 Pat 高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 2，而 Pat 不高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 0. 她的期望收益=$2\times0.5+0\times0.5=1$
    - 如果 Chris 选择 Fight，那么 Pat 高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 0，而 Pat 不高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 1. 她的期望收益=$0\times0.5+1\times0.5=0.5$
    - 从而, 如果 Chris 高兴，她的最优反应是 Opera.

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

- 检查((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight is unhappy)) 是否是一个贝叶斯纳什均衡.
  - 如果 Chris 不高兴，那么她对 Pat 的 (Opera if happy, Fight is unhappy)的最优反应
    - 如果 Chris 选择 Opera，那么 Pat 高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 0,而 Pat 不高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 2. 她的期望收益=$0\times0.5+2\times0.5=1$
    - 如果 Chris 选择 Fight，那么 Pat 高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 1, 而 Pat 不高兴(概率为 0.5)时 Chris 的收益是 0. 她的期望收益=$1\times0.5+0\times0.5=0.5$
    - 从而,如果 Chris 不高兴，那么她的最优反应是 Opera.

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

- 检查((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight if unhappy)) 是否是一个贝叶斯纳什均衡.
  - 如果 Pat 高兴，那么 Pat 对 Chris 的(Opera if happy, Opera if unhappy)的最优反应
    - 如果 Pat 选择 Opera ，那么 Chris 高兴(概率为 2/3)时 Pat 的收益是 1，而 Chris 不高兴(概率为 1/3)时 Pat 的收益是 1 他的期望收益=1×(2/3)+1×(1/3)=1
    - 如果 Pat 选择 Fight，那么 Chris 高兴(概率为 2/3)时 Pat 的收益是 0，而 Chris 不高兴(概率为 1/3)时 Pat 的收益是 0. 他的期望收益=0×(2/3)+0×(1/3)=0
    - 从而, 如果 Pat 高兴，那么他的最优反应是 Opera .

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

- 检查((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight if unhappy)) 是否是一个贝叶斯纳什均衡.
  - 如果 Pat 不高兴，那么 Pat 对 Chris 的(Opera if happy, Opera if unhappy)的最优反应
    - 如果 Pat 选择 Opera ，那么 Chris 高兴(概率为 2/3)时 Pat 的收益是 0，而 Chris 不高兴(概率为 1/3)时 Pat 的收益是 0. 他的期望收益=0×(2/3)+0×(1/3)=0
    - 如果 Pat 选择 Fight ，那么 Chris 高兴(概率为 2/3)时 Pat 的收益是 2，而 Chris 不高兴(概率为 1/3)时 Pat 的收益是 2. 他的期望收益 2×(2/3)+2×(1/3)=2
    - 从而, 如果 Pat 不高兴，那么他的最优反应是 Fight.

- 所以, ((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight is unhappy)) 是一个贝叶斯纳什均衡.

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

Chris推断 Pat以0.5的概率高兴,以0.5的概率不高兴

Chris is happy

		Pat (0.5, 0.5)			
		(O,O)	**(O,F)**	**(F,O)**	**(F,F)**
Chris	O	2	1	1	0
	F	0	1/2	1/2	1

Chris is unhappy

		Pat (0.5, 0.5)			
		(O,O)	**(O,F)**	**(F,O)**	**(F,F)**
Chris	O	0	1	1	2
	F	1	1/2	1/2	0

如果Chris高兴，当Pat选择(Opera if happy, Fight if unhappy)，而Chris选择Fight时Chris的期望收益

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

Pat推断 Chris 以2/3 的概率高兴, 以1/3的概率不高兴

Pat is happy

Chris (2/3, 1/3)

	Pat: O	Pat: F
(O,O)	1	0
(O,F)	2/3	2/3
(F,O)	1/3	4/3
(F,F)	0	2

Pat is unhappy

Chris (2/3, 1/3)

	Pat: O	Pat: F
(O,O)	0	2
(O,F)	1/3	4/3
(F,O)	2/3	2/3
(F,F)	1	0

如果Pat 不高兴，当Chris 选择(Fight if happy, Fight if unhappy)，而Pat's选择Opera时Pat的期望收益

Battle of the sexes with incomplete information (version two) (continued)

- 检查 ((Fight if happy, Opera if unhappy), (Fight if happy, Fight is unhappy)) 是否是一个贝叶斯纳什均衡. (Y)
- 检查 ((Opera if happy, Opera if unhappy), (Opera if happy, Fight is unhappy))是否是一个贝叶斯纳什均衡.(Y)
- 检查 ((Opera if happy, Fight if unhappy), (Fight if happy, Opera is unhappy是否是一个贝叶斯纳什均衡.(N)

3.2 Applications

- 3.2.A Mixed Strategies Revisited
- ---pp119-120.
- 3.2.B An Auction
- ----pp121-124
- Appendix 3.2. B----pp124-125
- 3.2.C A Double Auction
- -----pp125-129.

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons)

- 一个产品被拍卖.
- 两个投标人（**bidders**）, **1** 和 **2**, 同时递交标书.
- b_1代表 **bidder 1** 的投标价格（**bid**）， b_2 代表 **bidder 2** 的投标价格
- 出价更高的投标人赢得产品并支付她的出价
- 其他投标人不会得到产品也无需支付
- 在相同的情况下, 谁获胜取决于一枚硬币
- **Bidder *i*** 对产品有一个估价$v_i \in [0, 1]$. v_1 和 v_2 相互独立.
- **Bidder 1** 和 **2** 的收益函数:

$$u_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{if } b_1 > b_2 \\ \dfrac{v_1 - b_1}{2} & \text{if } b_1 = b_2 \\ 0 & \text{if } b_1 < b_2 \end{cases} \qquad u_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & \text{if } b_2 > b_1 \\ \dfrac{v_2 - b_2}{2} & \text{if } b_2 = b_1 \\ 0 & \text{if } b_2 < b_1 \end{cases}$$

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons) (continued)

- 标准式表述:
  - 两个投标人, 1 和 2
  - 行动集(投标价格集合): $A_1 \in [0, \infty)$, $A_2 \in [0, \infty)$
  - 类型集 (估价集合): $T_1 \in [0, 1]$, $T_2 \in [0, 1]$
  - 推断:
    Bidder 1 推断v_2在$[0, 1]$ 服从均匀分布.
    Bidder 2 推断v_1在$[0, 1]$ 服从均匀分布.
    v_1 和v_2 互相独立.
  - Bidder 1 和 2 的收益函数:

$$u_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{if } b_1 > b_2 \\ \dfrac{v_1 - b_1}{2} & \text{if } b_1 = b_2 \\ 0 & \text{if } b_1 < b_2 \end{cases} \qquad u_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & \text{if } b_2 > b_1 \\ \dfrac{v_2 - b_2}{2} & \text{if } b_2 = b_1 \\ 0 & \text{if } b_2 < b_1 \end{cases}$$

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons) (continued)

- **bidder 1 的策略是一个函数**$b_1(v_1)$, $v_1 \in [0,1]$.
- **bidder 2 的策略是一个函数**$b_2(v_2)$, $v_2 \in [0,1]$.

- **给定 bidder 1 对 bidder 2 的推断, 对于每个**$v_1 \in [0,1]$, **bidder 1 满足**

$$\mathop{Max}_{b_1 \geq 0} \quad (v_1 - b_1)\text{Prob}\{b_1 > b_2(v_2)\} + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\text{Prob}\{b_1 = b_2(v_2)\}$$

- **给定 bidder 2 对 bidder 1 的推断, 对于每个**$v_2 \in [0,1]$, **bidder 2 满足**

$$\mathop{Max}_{b_2 \geq 0} \quad (v_2 - b_2)\text{Prob}\{b_2 > b_1(v_1)\} + \frac{1}{2}(v_2 - b_2)\text{Prob}\{b_2 = b_1(v_1)\}$$

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons) (continued)

- 检查 $\left(b_1^*(v_1)=\frac{v_1}{2},\ b_2^*(v_2)=\frac{v_2}{2}\right)$ 是否是一个贝叶斯纳什均衡.
- 给定 **bidder 1** 对 **bidder 2** 的推断, 对于每个 $v_1\in[0,1]$, **bidder 1** 对于 $b_2^*(v_2)$ 的最优反应满足

$$\underset{b_1\geq 0}{Max}\quad (v_1-b_1)\text{Prob}\{b_1>b_2^*(v_2)\}+\frac{1}{2}(v_1-b_1)\text{Prob}\{b_1=b_2^*(v_2)\}$$

$$\underset{b_1\geq 0}{Max}\quad (v_1-b_1)\text{Prob}\{b_1>\frac{v_2}{2}\}+\frac{1}{2}(v_1-b_1)\text{Prob}\{b_1=\frac{v_2}{2}\}$$

$$\underset{b_1\geq 0}{Max}\quad (v_1-b_1)\text{Prob}\{v_2<2b_1\}+\frac{1}{2}(v_1-b_1)\text{Prob}\{v_2=2b_1\}$$

$$\underset{b_1\geq 0}{Max}\quad (v_1-b_1)2b_1$$

FOC: $$2v_1-4b_1=0\quad\Rightarrow\quad b_1(v_1)=\frac{v_1}{2}$$

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons) (continued)

- 所以, 对于每个$v_1 \in [0,1]$, $b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}$ 是 **bidder 1** 对 **bidder 2** $b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}$ 的最优反应.
- 对称的, 对于每个$v_2 \in [0,1]$, $b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}$ 是 **bidder 2** 对 **bidder 1** $b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}$ 的最优反应.
- 所以, $\left(b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2},\ b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2} \right)$ 是贝叶斯纳什均衡.

First-price sealed-bid auction (3.2.B of Gibbons) (continued)

每个投标人都面临基本的权衡（**Trade-off**）:

投标价格越高，中标的可能性越大；投标价格越低，一旦中标则获得的收益就越大.

3.3 The Revelation Principle

- 定理（显示原理）任何贝叶斯博弈的任何贝叶斯纳什均衡都可以表述为一个激励相容的直接机制（incentive-compatible direct mechanism ）.
- -----pp129-132.